Staatliche Berufliche Oberschule Kitzingen

3. Schulaufgabe aus der Mathematik am 14. April 2015

Lösungsskizze auf den folgenden Seiten

Name: _______________, B12TA	BEen: /60	Punkte: ____

Hilfsmittel: zugelassener Taschenrechner, zugelassene Merkhilfe

Arbeitszeit: 80 Minuten

Alle Aufgaben sind auf den (karierten) Bögen zu lösen. Tipp-Ex, Tintenkiller u. Ä. sind nicht erlaubt! Nur schwarz und blau schreiben und nur mit Bleistift zeichnen!
Rechnungen und Ergebnisse auf dem Angabeblatt werden nicht berücksichtigt, gleichwohl ist dieses ebenso wie alle Bögen mit Namen zu versehen und abzugeben.
Alle Teilaufgaben sind auf nachvollziehbare Art zu lösen; gegebenenfalls sind Rechnungen anzugeben.
Ergebnisse sind so weit wie möglich zu vereinfachen. Achten Sie darauf, nicht mit gerundeten Zahlen weiterzurechnen.

1.0 Wir betrachten die Funktion $f: x \mapsto \ln\left(e^x - 1\right)^2$ mit ihrer maximalen Definitionsmenge D_f in den reellen Zahlen mit dem Graphen G_f.

1.1 Bestimmen Sie D_f. 4 BE

1.2 Ermitteln Sie die Koordinaten der Schnittpunkte von G_f mit der Winkelhalbierenden des ersten und dritten Quadranten auf zwei Nachkommastellen gerundet. 7 BE

1.3 Berechnen Sie den Term der ersten Ableitung von f (mit Zwischenschritt!). 2 BE

[Mögliches Ergebnis: $f'(x) = \dfrac{2e^x}{e^x - 1}$]

1.4 Ermitteln Sie nachvollziehbar (Vorzeichentabellen oder Ungleichungen) die größtmöglichen Monotonie- und Krümmungsintervalle von f. 14 BE

1.5 Bestimmen Sie

$$\lim_{x \to -\infty} f'(x) \text{ und } \lim_{x \to +\infty} f'(x)$$

und geben Sie dabei alle notwendigen Zwischenschritte und Erläuterungen an. 6 BE

1.6 Zeichnen Sie den Graphen der Ableitung $G_{f'}$ mit seinen Asymptoten unter Verwendung der bisherigen Ergebnisse für $x \in [-6;6]$ in ein Koordinatensystem mit 1 LE $\ll$ 1 cm. 5 BE

1.7 Ermitteln Sie den Inhalt der Fläche zwischen dem Graphen der Ableitung $G_{f'}$, der x-Achse und den Geraden mit den Gleichungen x = 2 bzw. x =3 auf zwei Nachkommastellen gerundet. 4 BE

2.0 Wir gehen von den Punkten A(9|-3|2), B(8,5|1|2) und C(2|1|2) und der Ebene E: 2x – 3y = 1 im $\mathbb{R}^3$ aus.

2.1 Bestimmen Sie rechnerisch die Lage des Spiegelpunktes A´ von A an E. 6 BE

2.2 Ermitteln Sie rechnerisch die Gleichung der Spiegelgeraden von AB an E. 7 BE

2.3 Ermitteln Sie eine Gleichung der Ebene F, die senkrecht auf E durch A und B verläuft, in Koordinatenform. 3 BE

2.4 Beschreiben Sie die Lage der Ebene F bezüglich des Koordinatensystems. 2 BE

0-11	12-16	17-20	21-24	25-27	28-30	31-33	34-36	37-39	40-42	43-45	46-48	49-51	52-54	55-57	58-60
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15

Lösungsskizze:

1.1 $\left(e^x - 1\right)^2 > 0$

$e^x - 1 \neq 0$

$e^x \neq 1$

$x \neq 0$

$D_f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$

1.2 $\ln\left(e^x - 1\right)^2 = x$

$\left(e^x - 1\right)^2 = e^x$

$\left(e^x\right)^2 - 2e^x + 1 = e^x$

$z^2 - 3z + 1 = 0$

$z_{1;2} = \dfrac{3 \pm \sqrt{5}}{2}$

$x_{1,2} \approx \pm 0{,}96$

1.3 $f'(x) = \dfrac{2\left(e^x - 1\right) \cdot e^x}{\left(e^x - 1\right)^2}$

1.4 $f'(x) = \dfrac{2e^x}{e^x - 1}$

e^x ist immer positiv,

$e^x - 1$ wechselt bei $x = 0$ das Vorzeichen,

daher smf in $\mathbb{R}^-$ und sms in $\mathbb{R}^+$

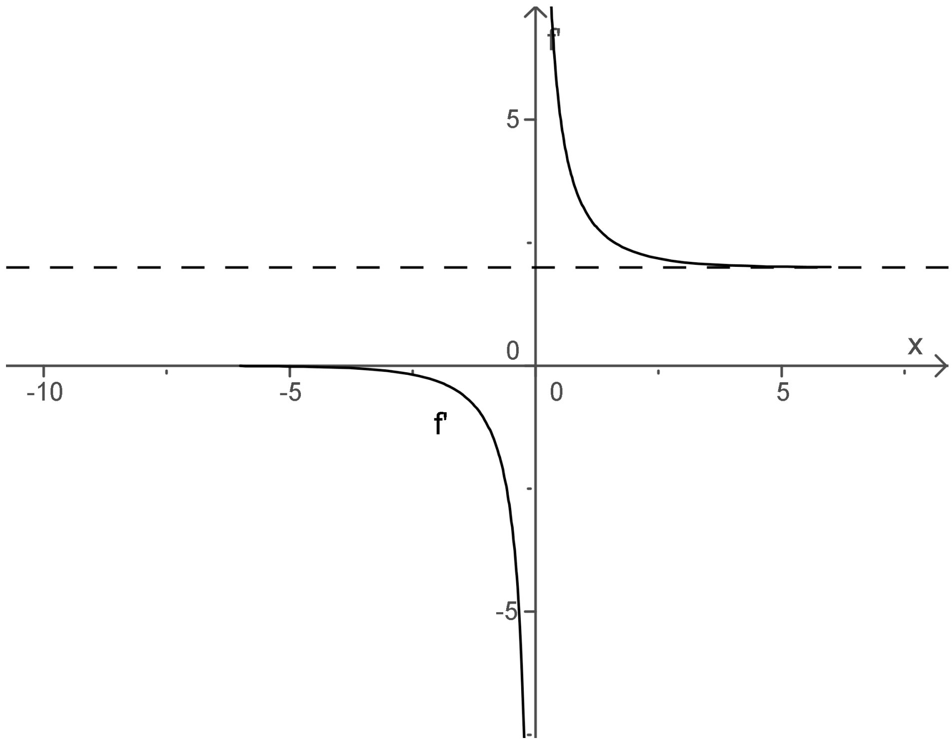
$f''(x) = \dfrac{2e^x\left(e^x - 1\right) - 2e^x \cdot e^x}{\left(e^x - 1\right)^2} = \dfrac{2e^{2x} - 2e^x - 2e^{2x}}{\left(e^x - 1\right)^2} = \dfrac{-2e^x}{\left(e^x - 1\right)^2}$

Der Zähler ist immer negativ, der Nenner (in der Definitionsmenge) immer positiv, daher rechtsgekrümmt in $\mathbb{R}^-$ und in $\mathbb{R}^+$.

1.5 $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{\overbrace{2e^x}^{\to 0}}{\underbrace{e^x - 1}_{\to -1}} = 0$ $\qquad$ $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\overbrace{2e^x}^{\to \infty}}{\underbrace{e^x - 1}_{\to \infty}} \overset{L'H}{=} \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{2e^x}{e^x} = 2$

0-11	12-16	17-20	21-24	25-27	28-30	31-33	34-36	37-39	40-42	43-45	46-48	49-51	52-54	55-57	58-60
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15

1.6



1.7

$$\int_2^3 f'(x)\,dx = \left[f(x)\right]_2^3 = f(3) - f(2) \approx 2{,}19$$

2.1 $n: \vec{x} = \begin{pmatrix} 9 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix} + \nu \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix}$

$n \cap E$: $2(9 + 2\nu) - 3(-3 - 3\nu) = 1 \Rightarrow \nu_L = -2 \rightarrow \nu_{A'} = -4 \rightarrow A'(1|9|2)$

2.2 $AB: \vec{x} = \begin{pmatrix} 9 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -0{,}5 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$

$AB \cap E$: $2(9 - 0{,}5\lambda) - 3(-3 + 4\lambda) = 1$

$\lambda = 2$

$S(8|5|2)$

$$AB': \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 9 \\ 2 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 7 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix}$$

2.3 $\vec{n}_E \times 2\overrightarrow{AB} = 13 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

F: $z = 2$

2.4 F liegt parallel zur x-y-Koordinatenebene

0-11	12-16	17-20	21-24	25-27	28-30	31-33	34-36	37-39	40-42	43-45	46-48	49-51	52-54	55-57	58-60
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15