3. Schulaufgabe aus der Mathematik am 10. April 2014

Lösungsskizze auf der 2. und 3. Seite

Name: ________________, B12TA

BEen: /60

Punkte: ____

Hilfsmittel: zugelassener Taschenrechner**,** zugelassene Merkhilfe **Arbeitszeit:** 80 Minuten

Alle Aufgaben sind auf den (karierten) Bögen zu lösen.
Tipp-Ex, Tintenkiller u. Ä. sind nicht erlaubt!
Nur schwarz und blau schreiben und nur mit Bleistift zeichnen!
Rechnungen und Ergebnisse auf dem Angabeblatt werden nicht berücksichtigt, gleichwohl ist dieses ebenso wie alle Bögen mit Namen zu versehen und abzugeben.
Ergebnisse sind so weit wie möglich zu vereinfachen und (auch) exakt, d.h. ungerundet anzugeben.

1.0 Wir betrachten die Funktion $f: x \mapsto x + \ln(x^2+1)$; D = IR mit dem Graphen G_f.

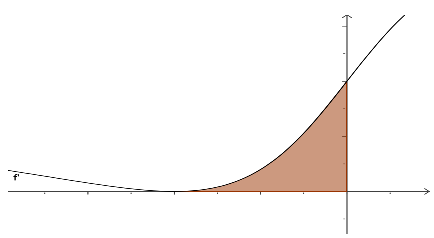
1.1 Bestimmen Sie die erste, zweite und dritte Ableitung von f. $\boxed{12 \text{ BE}}$

[Mögliches Zwischenergebnis: $f'(x) = \frac{(x+1)^2}{x^2+1}$]

1.2 Argumentieren Sie, warum x = 0 eine und die einzige Nullstelle von f ist. $\boxed{3 \text{ BE}}$

1.3 Ermitteln Sie rechnerisch die Lage und Art der Extrem-, Terrassen- und Wendepunkte von G_f und weisen Sie gegebenenfalls die Wendepunkteigenschaft (z. B. mit Hilfe der 3. Ableitung) nach. $\boxed{9 \text{ BE}}$

1.4 Zeichnen Sie G_f in ein kartesisches Koordinatensystem mit 1 LE entspricht 1 cm für x ∈ [-8;4] unter Verwendung der in 1.3 berechneten Punkte. $\boxed{3 \text{ BE}}$



1.5 Bestimmen Sie den Inhalt der (grau unterlegten endlichen) Fläche, die zwischen dem Graphen der ersten Ableitung von f (der in der nicht maßstäblichen Abbildung zu sehen ist) und den beiden Koordinatenachsen liegt. $\boxed{4 \text{ BE}}$

2. Aus einer Stange von 120 cm Länge soll das Kantenmodell eines Quaders mit quadratischer Grundfläche und maximalem Volumen gebastelt werden. Berechnen Sie dessen Abmessungen, wobei die Stangendicke und die Eckverbindungen vernachlässigt werden. $\boxed{11 \text{ BE}}$

3.0 Wir betrachten in einem kartesischen Koordinatensystem des IR^3 die Ebene E mit der Gleichung x + 2y + 3z = 7.

3.1 Berechnen Sie eine Gleichung der Geraden, die durch Spiegelung der x-Achse an E entsteht. $\boxed{8 \text{ BE}}$

3.2 Bestimmen Sie rechnerisch den Abstand des Ursprungs des Koordinatensystems von E. $\boxed{3 \text{ BE}}$

3.3 Ermitteln Sie eine möglichst einfache Gleichung der Spurgeraden von E in der yz-Ebene mit ausschließlich ganzen Zahlen als Koordinaten bzw. Komponenten. $\boxed{7 \text{ BE}}$

0-11	12-16	17-20	21-24	25-27	28-30	31-33	34-36	37-39	40-42	43-45	46-48	49-51	52-54	55-57	58-60
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15

Lösungsskizze:

1.1 $f'(x) = 1 + \frac{2x}{x^2+1} = \frac{x^2+1}{x^2+1} + \frac{2x}{x^2+1} = \frac{(x+1)^2}{x^2+1}$

Für die Berechnung der zweiten Ableitung ist es günstig, vom ersten obigen Term auszugehen:

$$f''(x) = 0 + \frac{2(x^2+1) - 2x \cdot 2x}{(x^2+1)^2} = \ldots = \frac{2-2x^2}{(x^2+1)^2}$$

$$f'''(x) = \frac{-4x(x^2+1)^2 - (2-2x^2) \cdot 2 \cdot 2x(x^2+1)}{(x^2+1)^4} = \ldots = \frac{4x^3 - 12x}{(x^2+1)^3}$$

1.2 $f(0) = 0 + \ln 1 = 0$

Aus 1.1 folgt, dass die erste Ableitung auf der ganzen Definitionsmenge ≥ 0 ist, somit ist die Funktion streng monoton zunehmend und kann nur eine Nullstelle haben

1.3 $f'(x) = 0 \Rightarrow x = -1$

$f(-1) = -1 + \ln 2$

$f''(-1) = 0$

$f'''(-1) = 1 \neq 0$

$\Rightarrow TEP(-1|\ln 2 - 1)$

$f''(x) = 0 \Rightarrow x = \pm 1$

x = -1 ergibt den bereits bekannten Terrassenpunkt, x = 1 führt zu:

$f(1) = 1 + \ln 2$

$f'''(1) = -1 \neq 0$

$W(1|1 + \ln 2)$

1.5 A = f(0) – f(-1) = 1 – ln2, da f die Stammfunktion von f´ ist

2. NB: 8a + 4b = 0

ZF: $V(a) = a^2(30 - 2a) = 30a^2 - 2a^3$

D =]0;15[

$V'(a) = 60a - 6a^2$

$V''(a) = 60 - 12a$

$a_1 = 0 \notin D$

$a_2 = 10$

$V''(10) = -60 < 0$

Einziges Extremum der stetigen Funktion in der offenen Definitionsmenge ist absolut

b = 10

0-11	12-16	17-20	21-24	25-27	28-30	31-33	34-36	37-39	40-42	43-45	46-48	49-51	52-54	55-57	58-60
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15

3.1 Die x-Achse hat als Gleichung $\vec{x} = \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

Der Schnittpunkt der x-Achse mit E ist (7|0|0)

Die Lotgerade des Ursprungs bzgl. E hat die Gleichung $\vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \nu \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$

Schneidet man diese mit E, erhält man $\nu_L = 0{,}5$

und mit $\nu_O = 1$ den Spiegelpunkt des Ursprungs (1|2|3)

Daraus folgt für die Spiegelgerade $\vec{x} = \begin{pmatrix} 7 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 6 \\ -2 \\ -3 \end{pmatrix}$

3.2 Aus der Berechnung des Spiegelpunkts des Ursprungs an E ergibt sich für den Lotfußpunkt des Ursprungs bzgl. E (0,5|1|1,5), der Betrag dessen Ortsvektors ist $\frac{\sqrt{14}}{2}$

3.3 Aus den Achsenabschnittspunkten $S_y(0|\frac{7}{2}|0)$ und $S_z(0|0|\frac{7}{3})$ ergibt sich für die Spurgerade

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{7}{2} \\ 0 \end{pmatrix} + \sigma \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{7}{2} \\ \frac{7}{3} \end{pmatrix}$$

bzw. mit den geforderten „Schönheitsmaßnahmen" z. B.:

$\vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \sigma \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}$ Der Richtungsvektor wurde dazu mit 6 multipliziert und dann für $\sigma = \frac{1}{2}$ gesetzt, was den „schöneren" Aufpunkt ergibt

0-11	12-16	17-20	21-24	25-27	28-30	31-33	34-36	37-39	40-42	43-45	46-48	49-51	52-54	55-57	58-60
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15