B12TA

2. Schulaufgabe aus der Mathematik am 11. Februar 2014

Lösungsskizze auf den folgenden Seiten

Hilfsmittel: zugelassener Taschenrechner, zugelassene Merkhilfe

Arbeitszeit: 80 Minuten

Alle Aufgaben sind auf den (karierten) Bögen zu lösen. Tipp-Ex, Tintenkiller u. Ä. sind nicht erlaubt! Nur schwarz und blau schreiben und nur mit Bleistift zeichnen! Rechnungen und Ergebnisse auf dem Angabeblatt werden nicht berücksichtigt, gleichwohl ist dieses ebenso wie alle Bögen mit Namen zu versehen und abzugeben. Alle Teilaufgaben sind auf nachvollziehbare Art zu lösen; gegebenenfalls sind Rechnungen anzugeben. Ergebnisse sind so weit wie möglich zu vereinfachen.

1.0 Wir betrachten die Funktionenschar $k_a: x \mapsto 0{,}05x^3 + 0{,}3x^2 - 0{,}75x + a$; D = $\mathbb{R}$; a $\in \mathbb{R}$ mit den Graphen G_a.

1.1 Bestimmen Sie die Werte des Parameters a so, dass die Gerade mit der Gleichung y = –0,75x + 1,6 eine Tangente an G_a ist.

1.2.0 Von nun an sei **<u>a = 0</u>**, wir betrachten also die Funktion $k_0: x \mapsto 0{,}05x^3 + 0{,}3x^2 - 0{,}75x$ (sie kann auch der Kürze halber mit k bezeichnet werden) mit dem Graphen G_0:

1.2.1 Berechnen und runden Sie die Nullstellen von k_0 auf eine Nachkommastelle..

1.2.2 Ermitteln Sie Art und Lage der Extrempunkte von G_0.

1.2.3 Bestimmen Sie die Koordinaten des Wendepunkts von G_0.

1.2.4 Berechnen Sie eine Gleichung der Wendetangente t von G_0.

1.2.5 Zeichnen Sie G_0 für x $\in$ [–9;4] unter Verwendung der Ergebnisse von 1.2.1 bis 1.2.3 und t in ein kartesisches Koordinatensystem mit 1 LE ≪ 1 cm.

2.0 Wir betrachten die Funktion $f: x \mapsto 10 \cdot \dfrac{x-1}{x^2+3}$; D = $\mathbb{R}$ mit dem Graphen G_f.

2.1 Geben Sie die Nullstelle von f an.

2.2 Ermitteln Sie rechnerisch Art und Lage der Extrempunkte von G_f.

2.3 Zeichnen Sie G_f unter Verwendung der Ergebnisse von 2.1 und 2.2 für x $\in$ [–7;7]. Auf die Betrachtung der Wendepunkte wird verzichtet.

3.0 In einem kartesischen Koordinatensystem des $\mathbb{R}^3$ ist die Ebene E durch die Punkte A(2|1|0), B(1|0|1) und C(0|2|0) gegeben.

3.1 Ermitteln Sie eine Gleichung von E in Koordinatenform. [Mögliches Zwischenergebnis: x + 2y + 3z = 4]

3.2 Geben Sie eine Gleichung der Geraden g durch den Punkt P(7|6|9) an, die auf E senkrecht steht.

3.3 Bestimmen Sie die Koordinaten des Schnittpunktes von g und E.

3.4 Berechnen Sie den Schnittwinkel der Geraden g und PC und runden Sie ihn auf zwei Nachkommastellen.

Lösungsskizze:

1.1 Die Steigung der Geraden beträgt –0,75.
Also wird die Ableitung $k_a'(x) = 0{,}15x^2 + 0{,}6x - 0{,}75 = -0{,}75$ gesetzt, um die x-Koordinaten der Berührungspunkte zu ermitteln (Ableitung = Steigung der Tangente!).
Es ergibt sich $0{,}15x^2 + 0{,}6x = 0$
$0{,}15x \cdot (x + 4) = 0$
$\underline{x_1 = 0}$: Einsetzen in die Geradengleichung liefert $y = 1{,}6$; $k_a(0) = a$.
Da die y-Koordinaten des Berührungspunktes übereinstimmen müssen, ist $a_1 = 1{,}6$.
$\underline{x_2 = -4}$: Einsetzen in die Geradengleichung liefert $y = 4{,}6$; $k_a(-4) = 4{,}6 + a$.
Da die y-Koordinaten des Berührungspunktes übereinstimmen müssen, ist $a_2 = 0$.

1.2.1 $0{,}05x(x^2 + 6x - 15) = 0$

$x_1 = 0 \quad x_2 \approx 1{,}9 \quad x_3 \approx -7{,}9$

1.2.2 $0{,}15x^2 + 0{,}6x - 0{,}75 = 0$

$x_1 = 1;\ x_2 = -5$

$k''(1) = 0{,}9 > 0 \rightarrow T(1|-0{,}4)$

$k''(-5) = -0{,}9 < 0 \rightarrow H(-5|5)$

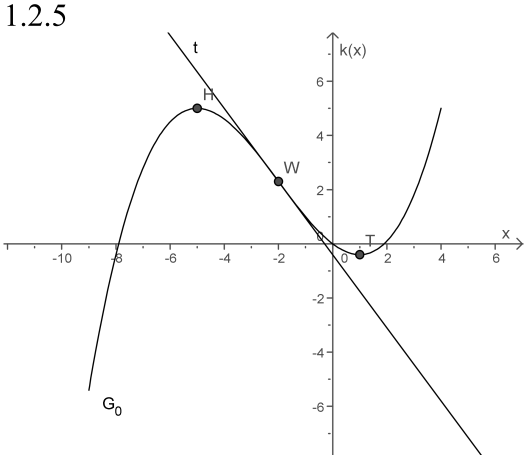
1.2.3 $k'''(x) = 0{,}3 \neq 0 \rightarrow W(-2|2{,}3)$

1.2.4 $k'(-2) = -1{,}35$

$2{,}3 = -1{,}35 \cdot (-2) + t$

$y = -1{,}35x - 0{,}4$

1.2.5



2.1 Zähler = 0 → x = 1

2.2 $f'(x) = 10 \cdot \frac{x^2 + 3 - (x-1) \cdot 2x}{(x^2+3)^2} = 10 \cdot \frac{-x^2 + 2x + 3}{(x^2+3)^2}$

Nullsetzen des Zählers liefert $x_1 = -1$ und $x_2 = 3$
Die Ermittlung der Art des Extrempunkts kann über eine Vorzeichentabelle oder mittels der zweiten Ableitung erfolgen.

VZT:

	x<	–1	<x<	3	<x
-10	-	-	-	-	-
x + 1	-	0	+	+	+
x – 3	-	-	-	0	+
$(x^2+3)^2$	+	+	+	+	+
f′	-	0	+	0	-
f	↓	T	↑	H	↓

ODER

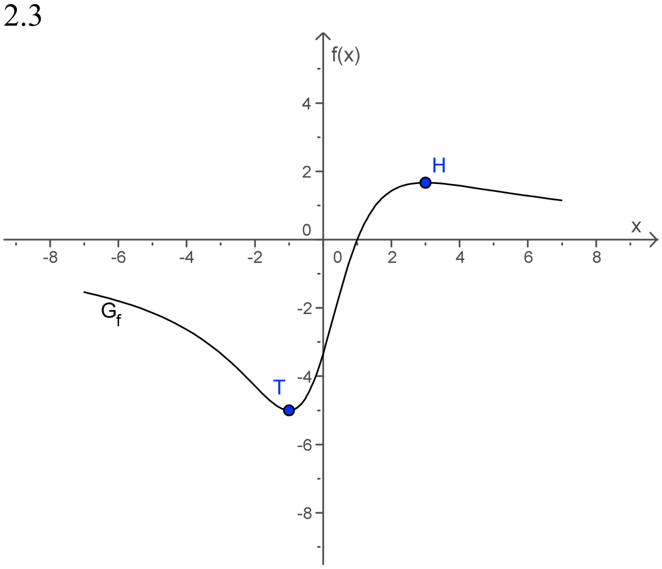
$$f''(x) = \frac{(-2x+2) \cdot (x^2+3)^2 - (-x^2+2x+3) \cdot 2 \cdot (x^2+3) \cdot 2x}{(x^2+3)^4}$$

Da die Berechnung der zweiten Ableitung nicht ausdrücklich verlangt ist, könnte man an dieser Stelle schon einsetzen.

$$= \frac{(x^2+3) \cdot ((-2x+2) \cdot (x^2+3) - (-x^2+2x+3) \cdot 2 \cdot 2x)}{(x^2+3)^4} = \frac{2x^3 - 6x^2 - 18x + 6}{(x^2+3)^2}$$

T(–1|–5) H(3|5/3)

2.3



3.1 $\vec{n} = z.B. \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ -3 \end{pmatrix} = -1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$

$\vec{n} \circ \vec{x} = \vec{n} \circ \vec{a} \rightarrow x + 2y + 3z = 4$

3.2 Da g senkrecht auf E steht, ist ihr Richtungsvektor der Normalvektor von E:

$$g : \vec{x} = \begin{pmatrix} 7 \\ 6 \\ 9 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

3.3 $7 + \lambda + 2(6 + 2\lambda) + 3(9 + 3\lambda) = 4$

$\lambda = -3$

S(4|0|0)

3.4 $\overrightarrow{PC} = \begin{pmatrix} -7 \\ -4 \\ -9 \end{pmatrix}$

$$\cos\varphi = \frac{\left| \begin{pmatrix} -7 \\ -4 \\ -9 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \right|}{\sqrt{146} \cdot \sqrt{14}} \approx 0,93$$

$\varphi \approx 21,72°$